Tutorstvo iz Fizike II, 10.4.2013

Rešitev naloge: b) Sprememba entropije za krožne spremembe je $\Delta S = 0$, saj velja entropijski zakon

$$\oint dS = 0$$

c) Izračunajmo končno temperaturo T_k za Carnotov toplotni stroj (predpostavimo $T_2 > T_1$):

$$dS = 0 = \frac{dQ}{T_1(t)} + \frac{dQ}{T_2(t)} = \frac{mc\,dT_1}{T_1(t)} + \frac{mc\,dT_2}{T_2(t)} \quad (dT_2 < 0)$$

$$\frac{dT_1}{T_1(t)} = -\frac{dT_2}{T_2(t)}$$

$$\ln\frac{T_k}{T_1} = \ln\frac{T_2}{T_k}$$

$$T_k = \sqrt{T_1 T_2} \tag{1}$$

a) Celotno delo, ki ga stroj opravi je razlika oddane in prejete toplote:

$$A = |Q_2| - |Q_1|$$

$$A = -\int_{T_2}^{T_k} mc\,dT - \int_{T_1}^{T_k} mc\,dT$$

$$A = -mc(2T_k - T_1 - T_2) = mc(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 \tag{2}$$

Kaj pa če je izkoristek n-krat manjši, torej $\eta = \eta_C/n$?

$$\eta = \frac{A}{|Q_2|} = 1 - \left|\frac{Q_1}{Q_2}\right|$$

$$1 + \frac{dT_1}{dT_2} = \frac{1}{n}(1 - \frac{T_1}{T_2}) \tag{3}$$

V enačbi (3) pazimo na predznak, saj mora končni izkoristek biti manjši od 1, $\frac{dT_1}{dT_2}$ pa je tudi negativna količina.

Dobimo diferencialno enačbo za $T_1(T_2)$:

$$\left(\frac{1}{n} - 1\right) T_2 = \frac{1}{n} T_1 + \frac{dT_1}{dT_2} T_2 \tag{4}$$

Najprej rešimo homogeni del enačbe, tako da ločimo spremenljivke in integriramo:

$$\frac{1}{n}T_1 + \frac{dT_1}{dT_2}T_2 = 0$$

$$\frac{dT_1}{T_1} = \frac{1}{n}\frac{dT_2}{T_2}$$

$$T_1 = C\,T_2^{-\frac{1}{n}}$$

Nato še variiramo konstanto $C = C(T_2)$:

$$\left(\frac{1}{n} - 1\right)T_2 = \frac{1}{n}C\,T_2^{-\frac{1}{n}} + C'\,T_2^{-\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n}C\,T_2^{-\frac{1}{n}}$$

$$C' = \left(\frac{1}{n} - 1\right)T_2^{\frac{1}{n}}$$

$$C = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)T_2^{\frac{1}{n}+1} + D$$

Na koncu še upoštevamo začetna pogoja T_{10} in T_{20}, da določimo konstanto D in dobimo:

$$T_1 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)T_2 + \left[T_{10} - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)T_{20}\right]T_{20}^{\frac{1}{n}}T_2^{-\frac{1}{n}} \tag{5}$$

Da dobimo končno temperaturo T_k enačimo enačbo (5) kot $T_1 = T_2 = T_k$ in dobimo:

$$T_k = \left[\frac{1+n}{2n}T_{20}^{\frac{1}{n}}\left(T_{10} - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)T_{20}\right)\right]^{\frac{n}{1+n}} \tag{6}$$

Preverimo še smiselnost rezultata:

$$\lim_{n\to 1} T_k = \sqrt{T_1T_2}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_k = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Obstaja pa tudi druga pot. Definiramo novo delo $A = \frac{1}{n}A_C$. Tako velja:

$$Q_k = Q_1 + Q_2 - A = Q_1 + Q_2 - \frac{1}{n}A_C$$

$$Q_k = mcT_1 + mcT_2 - \frac{1}{n}mc(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})^2$$

$$T_k = \frac{T_1 + T_2 - \frac{1}{n}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}{2} \tag{7}$$